ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ II

ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΦΥΛΛΑΔΙΟ **2**

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

ΒΟΗΘΟΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: Χ. Ψαρουδάκης

ΙΣΤΟΣΕΛΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII.html

28 - 3 - 2012

Άσκηση 1. *Έστω $\mathcal{E}$ ένας διανυσματικός χώρος υπεράνω του σώματος $\mathbb{K}$, και $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathcal{E}$. Έστω $\vec{x}$ και $\vec{y}$ δύο ιδιοδιανύσματα του f τα οποία αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές του f. Αν $a, b \in \mathbb{K}$ και $ab \neq 0$, να δείξετε ότι το διάνυσμα $a\vec{x} + b\vec{y}$ δεν είναι ιδιοδιάνυσμα της f.*

Λύση. *Υποθέτουμε αντίθετα ότι το $a\vec{x} + b\vec{y}$ είναι ιδιοδιάνυσμα της f που αντιστοιχεί σε κάποια ιδιοτιμή μ της f. Από υπόθεση τα $\vec{x}$ και $\vec{y}$ είναι δύο ιδιοδιανύσματα της f που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές κ και λ αντίστοιχα, με $\kappa \neq \lambda$. Επειδή $ab \neq 0$, θα έχουμε $a \neq 0 \neq b$, τότε:*

$$\begin{aligned}
& f(a\vec{x} + b\vec{y}) = \mu(a\vec{x} + b\vec{y}) \\
\Longrightarrow\quad & af(\vec{x}) + bf(\vec{y}) = a\mu\vec{x} + b\mu\vec{y} \\
\Longrightarrow\quad & a\kappa\vec{x} + b\lambda\vec{y} = a\mu\vec{x} + b\mu\vec{y} \\
\Longrightarrow\quad & (a\kappa - a\mu)\vec{x} + (b\lambda - b\mu)\vec{y} = 0 && \vec{x}, \vec{y} : \text{ γραμμικά ανεξάρτητα} \\
\Longrightarrow\quad & a(\kappa - \mu) = 0 \ \text{ και } \ b(\lambda - \mu) = 0 && a \neq 0 \neq b \\
\Longrightarrow\quad & \kappa - \mu = 0 \ \text{ και } \ \lambda - \mu = 0 \\
\Longrightarrow\quad & \kappa = \mu = \lambda
\end{aligned}$$

Άρα καταλήξαμε σε άτοπο αφού γνωρίζουμε ότι $\kappa \neq \lambda$. Συνεπώς το διάνυσμα $a\vec{x} + b\vec{y}$ δεν είναι ιδιοδιάνυσμα της f. □

Άσκηση 2. *Βρείτε τις ιδιοτιμές καθώς και τους αντίστοιχους ιδιοχώρους του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & i & i \\ i & 0 & i \\ i & i & 0 \end{pmatrix} \ \in \ \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{C}).$$

Λύση. *Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $P_A(\lambda) = -(\lambda + i)^2(\lambda - 2i)$ και άρα έχουμε τις ιδιοτιμές: $\lambda_1 = 2i$ απλή και $\lambda_2 = -i$ πολλαπλότητας δύο. Τότε εύκολα βρίσκουμε ότι*

$$\mathcal{V}(2i) = \langle (1,1,1) \rangle \ \text{ και } \ \mathcal{V}(-i) = \langle (-1,1,0), (-1,0,1) \rangle$$

Το σύνολο $\{(1,1,1)\}$ είναι βάση του $\mathcal{V}(2i)$ και επειδή το σύνολο διανυσμάτων $\{(-1,1,0), (-1,0,1)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο έπεται ότι αποτελεί βάση του $\mathcal{V}(-i)$. □

Άσκηση 3. *Θεωρούμε τον ακόλουθο ενδομορφισμό του $\mathbb{R}$-διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$:*

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x - y, x + y, y - z)$$

Να βρείτε τις ιδιοτιμές του f καθώς και τους αντίστοιχους ιδιοχώρους.

Λύση. *Βρίσκουμε πρώτα το πίνακα της f στη κανονική βάση $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ του $\mathbb{R}^3$. Έχουμε:*

$$\begin{cases} f(1,0,0) = (1,1,0) \\ f(0,1,0) = (-1,1,1) \\ f(0,0,1) = (0,0,-1) \end{cases} \implies M(f)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $M(f)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ είναι

$$P_f(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$$

Άρα η f έχει ιδιοτιμή μόνο την $\lambda = -1$ με αλγεβρική πολλαπλότητα ένα, διότι το πολυώνυμο $\lambda^2 - 2\lambda + 2$ δεν έχει πραγματικές ρίζες. Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(-1)$ λύνουμε το παρακάτω ομογενές σύστημα:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies x = y = 0 \ \ \textit{και} \ \ z \in \mathbb{R}$$

Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(-1) &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0 \ \ \textit{και} \ \ z \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \big\{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\big\} \\ &= \langle (0,0,1) \rangle \end{aligned}$$

και άρα το σύνολο $\{(0,0,1)\}$ αποτελεί βάση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(-1)$. □

Άσκηση 4. *Βρείτε τις ιδιοτιμές και τους αντίστοιχους ιδιοχώρους του πίνακα*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \ \in \ \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

Λύση. *Βρίσκουμε πρώτα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Έχουμε:*

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{\Gamma_1 \to \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3} \begin{vmatrix} 5-\lambda & 5-\lambda & 5-\lambda \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\Sigma_3 \to \Sigma_3 - \Sigma_1]{\Sigma_2 \to \Sigma_2 - \Sigma_1} (5-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1-\lambda)^2$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 5$ πολλαπλότητας ένα και $\lambda_2 = 1$ πολλαπλότητας δύο. Για τον ιδιόχωρο $\mathcal{V}(5)$ λύνουμε το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -3x + y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases}$$

Έχουμε:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \to \Gamma_3 + 3\Gamma_1]{\Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \to \Gamma_3 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Από τις εξισώσεις $x+y-3z=0$ *και* $-4y+8z=0$ *έπεται ότι* $x=z$ *και* $y=2z$. *Επομένως*

$$\mathcal{V}(5)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=z \ \text{ και } \ y=2z\}=\{(z,2z,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z\in\mathbb{R}\}=\langle(1,2,1)\rangle$$

και άρα το σύνολο $\{(1,2,1)\}$ *αποτελεί μια βάση του ιδιοχώρου* $\mathcal{V}(5)$. *Για τον ιδιόχωρο* $\mathcal{V}(1)$ *έχουμε το ακόλουθο σύστημα:*

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \implies x=-y-z$$

και άρα

$$\mathcal{V}(1)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x=-y-z\}=\{(-y-z,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y,z\in\mathbb{R}\}=\langle(-1,1,0),(-1,0,1)\rangle$$

Αφού τα διανύσματα $(-1,1,0),(-1,0,1)$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα έπεται ότι μια βάση του ιδιοχώρου* $\mathcal{V}(1)$ *είναι το σύνολο* $\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$. $\square$

Άσκηση 5. *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι του πίνακα*

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&0&1\\4&-4&2\end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R}).$$

Λύση. *Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι:* $P_A(\lambda)=(2-\lambda)(\lambda^2-\lambda+6)$. *Η μόνη πραγματική ιδιοτιμή είναι* $\lambda=2$ *διότι το πολυώνυμο* $\lambda^2-\lambda+6$ *έχει αρνητική διακρίνουσα, και εύκολα βρίσκεται ότι* $\mathcal{V}(2)=\langle(1,1,1)\rangle$. $\square$

Άσκηση 6. *Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι του ενδομορφισμού*

$$f : \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}_2[t], \qquad P(t) \longmapsto f(P(t))=P(t)-P'(t)\ .$$

Λύση. *Αφού* $\mathbb{R}_2[t]=\langle 1,t,t^2\rangle$, *τότε ο πίνακας της* f *στη βάση* $\mathcal{B}=\{1,t,t^2\}$ *του* $\mathbb{R}_2[t]$ *είναι ο ακόλουθος:*

$$\begin{cases} f(1)=1-0=1=1\cdot1+0\cdot t+0\cdot t^2\\ f(t)=t-1=(-1)\cdot1+1\cdot t+0\cdot t^2\\ f(t^2)=t^2-2t=0\cdot1+(-2)\cdot t+1\cdot t^2\end{cases} \implies \mathsf{M}(f)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $\mathsf{M}(f)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ *είναι*

$$P_f(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&0\\0&1-\lambda&-2\\0&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^3$$

Άρα η f *έχει ιδιοτιμή την* $\lambda=1$ *με αλγεβρική πολλαπλότητα τρία. Για τον ιδιόχωρο* $\mathcal{V}(1)$ *λύνουμε το παρακάτω ομογενές σύστημα:*

$$\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-2\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \implies b=c=0 \ \text{ και } \ a\in\mathbb{R}$$

Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(1) &= \{a+bt+ct^2\in\mathbb{R}_2[t] \mid b=c=0 \ \text{ και } \ a\in\mathbb{R}\}\\ &= \{a \mid a\in\mathbb{R}\}\\ &= \langle 1\rangle\end{aligned}$$

και άρα βάση του ιδιοχώρου $\mathcal{V}(1)$ *αποτελούν τα σταθερά πολυώνυμα.* $\square$

Άσκηση 7. *Αν λ είναι μια ιδιοτιμή ενός ενδομορφισμού $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ή ενός πίνακα $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, να δείξετε ότι το λ^m είναι ιδιοτιμή του ενδομορφισμού f^m ή του πίνακα A^m αντίστοιχα, $\forall m \geq 1$. Ποιά είναι η σχέση των ιδιοχώρων $\mathcal{V}_f(\lambda)$ και $\mathcal{V}_{f^m}(\lambda^m)$ ή των ιδιοχώρων $\mathcal{V}_A(\lambda)$ και $\mathcal{V}_{A^m}(\lambda^m)$ αντίστοιχα;*

Λύση. *Έστω λ μια ιδιοτιμή ενός ενδομορφισμού $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$. Άρα υπάρχει διάνυσμα $\vec{0} \neq \vec{x} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$. Τότε:*

$$\begin{aligned} f^2(\vec{x}) &= f(f(\vec{x})) \\ &= f(\lambda\vec{x}) \\ &= \lambda f(\vec{x}) && f : \text{γραμμική απεικόνιση} \\ &= \lambda\lambda\vec{x} \\ &= \lambda^2\vec{x} \end{aligned}$$

και άρα το λ^2 είναι ιδιοτιμή της f^2 αφού $\vec{x} \neq \vec{0}$. Συνεχίζοντας τη παραπάνω διαδικασία, δηλαδή συνθέτοντας ξανά με την f, καταλήγουμε στη σχέση: $f^{m-1}(\vec{x}) = \lambda^{m-1}\vec{x}$ $(*)$. Επομένως, έχουμε:

$$f^m(\vec{x}) = f(f^{m-1}(\vec{x})) \overset{(*)}{=} f(\lambda^{m-1}\vec{x}) = \lambda^{m-1}f(\vec{x}) = \lambda^{m-1}\lambda\vec{x} = \lambda^m\vec{x}$$

Συνεπώς το λ^m είναι ιδιοτιμή του ενδομορφισμού f^m. Έστω $\vec{x} \in \mathcal{V}_f(\lambda)$, δηλαδή $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$. Τότε $f^m(\vec{x}) = \lambda^m\vec{x}$ και άρα το διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{V}_{f^m}(\lambda^m)$. Επομένως: $\mathcal{V}_f(\lambda) \subseteq \mathcal{V}_{f^m}(\lambda^m)$. □

Άσκηση 8. *Έστω $f : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ ένας ενδομορφισμός του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου $\mathcal{E}$. Αν ο f είναι ισομορφισμός, να δείξετε ότι το $\lambda \in \mathbb{K}$ είναι ιδιοτιμή του f αν και μόνον αν το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή του f^{-1}. Ποιά είναι η σχέση των ιδιοχώρων $\mathcal{V}_f(\lambda)$ και $\mathcal{V}_{f^{-1}}(\lambda^{-1})$;*

Λύση. *Έστω λ μια ιδιοτιμή της f. Τότε υπάρχει μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$ με $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$. Αφού η f είναι ισομορφισμός υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f^{-1} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ έτσι ώστε $f \circ f^{-1} = \mathsf{Id}_{\mathcal{E}} = f^{-1} \circ f$. Τότε:*

$$f^{-1}(f(\vec{x})) = f^{-1}(\lambda\vec{x}) \implies \vec{x} = \lambda f^{-1}(\vec{x}) \implies f^{-1}(\vec{x}) = \lambda^{-1}\vec{x}$$

και άρα το λ^{-1} είναι ιδιοτιμή της f^{-1} με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\vec{x}$. Αντίστροφα, αν λ^{-1} είναι ιδιοτιμή της f^{-1} τότε εφαρμόζοντας την f στη σχέση $f^{-1}(\vec{x}) = \lambda^{-1}\vec{x}$ έπεται ότι $f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$. Συνεπώς το λ είναι ιδιοτιμή της f με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\vec{x}$. Τέλος, από τα παραπάνω έπεται άμεσα ότι

$$\mathcal{V}_f(\lambda) = \{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid f(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\} = \{\vec{x} \in \mathcal{E} \mid f^{-1}(\vec{x}) = \lambda^{-1}\vec{x}\} = \mathcal{V}_{f^{-1}}(\lambda^{-1})$$

Παρατήρηση: *Να σημειώσουμε ότι ένας ισομορφισμός δεν μπορεί να έχει το 0 ως ιδιοτιμή. Πράγματι, αν $0 \in \mathbb{K}$ είναι ιδιοτιμή της f τότε υπάρχει ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\vec{x} \in \mathcal{E}$ έτσι ώστε $f(\vec{x}) = 0\vec{x} = 0$ και άρα $\vec{x} \in \operatorname{Ker} f$. Όμως, η f είναι ισομορφισμός άρα και μονομορφισμός, δηλαδή $\operatorname{Ker} f = \{\vec{0}\}$. Αυτό όμως είναι άτοπο και άρα αν λ ιδιοτιμή της f, όπου f: ισομορφισμός, τότε $\lambda \neq 0$.* □